Beroemde Bèta-Wetten voor Alfa's verklaard

Einstein's wet: $E=mc^2$

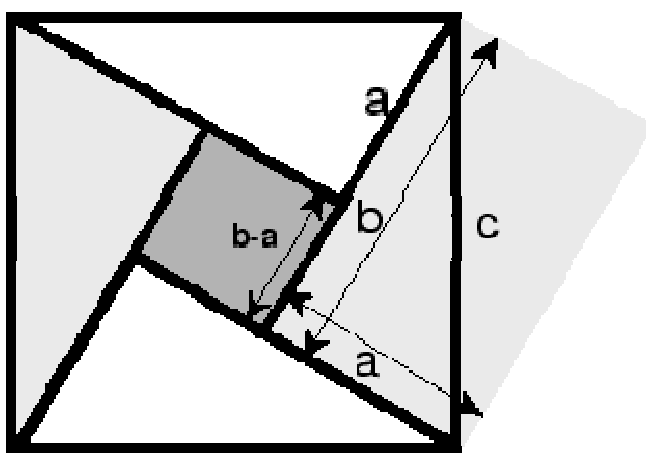
Prof. dr. Pierre van Baal, *Instituut-Lorentz voor Theoretische Natuurkunde, Universiteit Leiden*

De relativiteitstheorie van Einstein is wellicht een van de meest tot de verbeelding sprekende theorieën uit de natuurwetenschappen, en

$$E=mc^2$$

ongetwijfeld een van de meest bekende formules. Dat E voor energie staat, m voor massa en c voor lichtsnelheid is ook vrij algemeen bekend. Maar wat deze wet precies inhoudt, welke massa en welke energie bedoeld wordt, vergt wat meer inzicht. Al snel schrikken de formules af. Toch gaan we hier proberen juist dat uit te leggen, evenals het feit dat we bewegende klokken langzamer zien lopen, en een tweelingbroer jonger terugkomt van een ruimtereis. De stelling van Pythagoras en eenvoudige algebra zal alles zijn wat we nodig hebben.

De stelling van Pythagoras is die andere formule die bijna iedereen kan opdreunen. Al is het natuurlijk niet de bedoeling af te dwalen naar de meer mystieke betekenis van het woord formule: ``geijkte uitdrukking bij zekere traditionele of ambtelijke handelingen'' (een ritueel, zoals de Engelsen het wat duidelijker omschrijven). Nee, een formule is niets anders dan een uitdrukking in de taal van de wiskunde, waarin iets zo precies mogelijk wordt gezegd. Voor de stelling van Pythagoras is dat: het kwadraat (c^2) van de schuine zijde (c) is de som van de kwadraten (a^2+b^2) van de rechte zijden (a en b) van een rechthoekige driehoek. Of ook, de oppervlakte (c^2) van een vierkant met zijden die even lang zijn als de schuine zijde (c), is de som van de oppervlakten (a^2+b^2) van de twee vierkanten ieder met de zijden gelijk in lengte aan een van de twee rechte zijden (a en b). En zo hebben we bijna een bewijs van de stelling van Pythagoras geleverd. Zie de figuur hieronder,



waar we het vierkant met oppervlak c^2 opbouwen uit de vier rechthoekige driehoeken, met schuine zijde c en rechte zijden a en b. Daarbij houden we een vierkantje over, waarvan de zijden een lengte b-a hebben. Omdat twee dezelfde rechthoekige driehoeken, met hun schuine zijden tegen elkaar, een rechthoek geven met zijden a en b en dus met een oppervlak a X b geldt dat (c^2) gelijk is aan twee maal dat oppervlak ($2ab$, of ook vier maal het oppervlak van de driehoek), plus het oppervlak van het overblijvende vierkantje ($(a-b)^2$). Nu wat simpele algebra:

$$c^2=2ab+(a-b)^2= 2ab+a^2-2ab+b^2=a^2+b^2$$

en we zijn klaar met ons bewijs.

Wat we ons altijd bij formules moeten realiseren is dat de symbolen in het algemeen abstract zijn. De schuine zijde noemen we hier *c*, maar alleen in speciale gevallen bedoelen we daar inderdaad de lichtsnelheid mee. Met ons bewijs via oppervlakten is *c*, evenals *a* en *b*, natuurlijk een lengte. Toch kunnen we de stelling van Pythagoras ook toepassen als het over snelheden gaat. Stel namelijk dat we een snelheid in een bepaalde richting ontbinden in een horizontale en een vertikale snelheid. D.w.z. dat het object, waarvan we de snelheid meten, in 1 seconde *a* meter in de horizontale richting beweegt en tegelijkertijd *b* meter in de vertikale richting. De vraag is nu, wat is de totale afstand die het object in die ene seconde heeft afgelegd? Dat is natuurlijk de lengte van de schuine zijde van de driehoek met rechte zijden *a* en *b* meter. Maar nu kunnen we onze oppervlakte-afleiding[1] van de stelling van Pythagoras gebruiken om te concluderen dat de lengte van de schuine zijde gelijk is aan

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ meter,}$$

immers het kwadraat (c^2) van de wortel is gelijk aan a^2+b^2. Dus dit is de afstand die het object in één seconde heeft afgelegd. Snelheid is afgelegde weg (in meters) per tijdseenheid (1 seconde), meters per seconde (m/s). We kunnen dus bij het invullen van de getallen voor *a*, *b* en *c*, in plaats van meters ook meters per seconde lezen (immers delen door 1 geeft hetzelfde getal). Dit klinkt allemaal een beetje kinderachtig, maar er schuilt een belangrijk principe achter, dat van de universaliteit van bepaalde wetten en vergelijkingen. Hoe universeler hoe mooier. Mooi heeft hier uiteraard ook een zekere subjectieve betekenis, maar toch speelt `schoonheid' in de natuurwetenschappen een belangrijke rol.

We kunnen nu makkelijk een situatie beschouwen waarbij *c* inderdaad de lichtsnelheid is. Daarvoor sturen we licht onder een bepaalde hoek met de horizontale richting omhoog, en ontbinden de beweging van het licht in een horizontale en vertikale richting. De weg die het licht in één seconde aflegt is echter voor menselijke maatstaven gigantisch groot, namelijk driehonderd duizend kilometer, of wel driehonderd miljoen meter (als we heel precies willen zijn geldt *c=299.793* km/s). Het is in zo'n geval beter voor de tijd kleinere eenheden te nemen, zoals de milliseconde (éénduizendste seconde) of nog beter de microseconde, éénmiljoenste seconde. In 1 microseconde beweegt het licht nog steeds ongeveer 300 meter. Eigenlijk is de zogenaamde nanoseconde (éénmiljardste seconde) meer geschikt. In deze tijd legt het licht een afstand van 30 cm af. Dit maakt ook duidelijk dat de lichtsnelheid heel groot is in vergelijking met de snelheden waaraan de mens, zelfs in deze jachtige tijd, gewend is. Zo is de snelheid van het geluid ca. 330 m/s (dit noemt men ook wel Mach 1) al groot, maar valt in het niets ten opzichte van de snelheid waarmee de aarde om de zon beweegt, 30 km/s. Maar zelfs deze snelheid is nog steeds een factor tienduizend kleiner dan de lichtsnelheid. Bedenk dat dit zich verhoudt als de snelheid van een slak (10 m/h) tot die van een auto (100 km/h).

Dit is **de** reden waarom we in het dagelijks leven zo weinig rechtstreeks van de relativiteitstheorie van Einstein merken, en nog belangrijker, waarom het zo moeilijk voor ons is ons te verplaatsen naar een wereld waar de snelheden wél groot zijn en de effecten die Einstein voorspeld heeft wél makkelijk waarneembaar zijn. Einstein's uitgangspunten waren de volgende **waarnemingsfeiten**, geformuleerd in de drie postulaten van de relativiteitstheorie.

- Relativiteitsprincipe: Natuurkundige wetten zijn in alle stelsels (coördinaten en klok waarmee iemand zijn waarnemingen doet) hetzelfde.
- Lichtpostulaat: De lichtsnelheid in het luchtledige is in ieder intertiaal stelsel (een stelsel waar geen krachten op werken) hetzelfde.

- Equivalentieprincipe: In vrije val bewegen alle objecten met dezelfde versnelling.

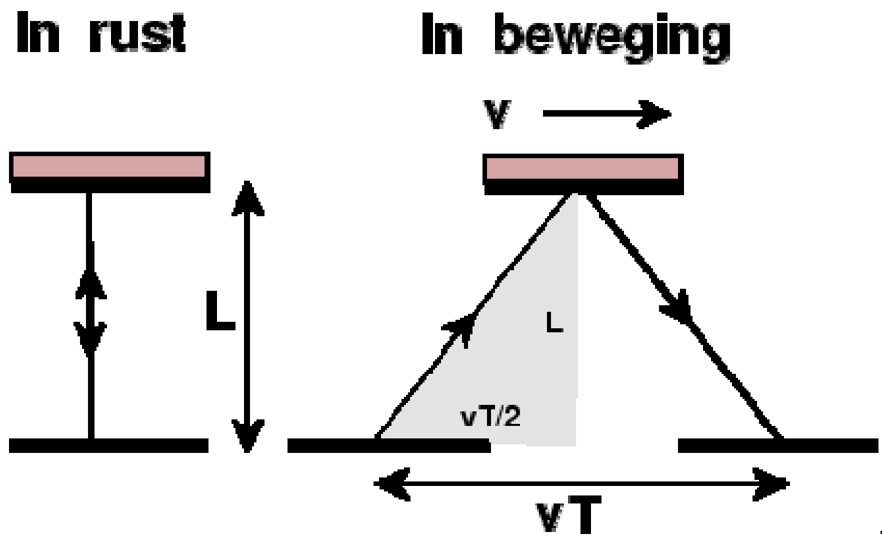
Het laatste postulaat is alleen van belang als we ook de gravitatie willen beschrijven. Deze door Einstein ontwikkelde theorie van gravitatie staat ook bekend onder de naam **algemene relativiteitstheorie**.

Het lichtpostulaat is in feite een gevolg van een veel vroegere theorie, namelijk die van Maxwell. Hij bracht de electriciteit en het magnetisme in één theorie samen, het electromagnetisme. Maxwell liet zien hoe licht een electromagnetische golf is, waarbij afwisselend het magnetische veld verandert, daarbij een veranderend electrisch veld veroorzaakt, dat op zijn beurt weer een veranderend magnetisch veld genereert, enz. Uit de theorie van Maxwell volgde al dat de voortplantingssnelheid van het licht niet afhangt van de bewegingstoestand van de waarnemer, noch van de bewegingstoestand van de bron. Licht heeft geen medium nodig om in te bewegen, zo volgt uit de theorie van Maxwell. Het zat er echter zo ingehamerd bij de natuurkundigen van de negentiende eeuw, dat golven zich door een medium voortplanten, en dat de beweging van de waarnemer ten opzichte van het medium opgeteld moet worden bij die van de golf in het medium, dat het lang geduurd heeft voordat het als zodanig werd onderkend. Daar was Einstein voor nodig.

Laten we maar meteen onze kennis over de stelling van Pythagoras gebruiken om aan te tonen dat uit het lichtpostulaat volgt dat we een bewegende klok langzamer zien lopen dan een stilstaande klok. Een klok is een mechanische constructie die twee opeenvolgende tijdstippen vastlegt, hetzij door de wijzers van de klok, cijfers op een display, of door ieder ander natuurkundig verschijnsel dat zich telkens herhaalt. Omdat het lichtpostulaat iets over licht zegt, nemen we als uitgangspunt de zg. **lichtklok**. Bij deze klok kaatst licht heen en weer tussen twee spiegels. Dat licht wordt uitgezonden met een zeer korte pulsduur, zodat we daarvan het begin nauwkeurig kunnen bepalen en hiermee het tijdsverschil tussen twee opeenvolgende tikken van de klok kunnen aflezen. We kiezen voor deze tijdsduur tussen twee tikken één nanoseconde waarin het licht heen en weer gaat. In die tijd legt het licht 30 centimeter af, dus staan de spiegels op een afstand van $L=15$ centimeter. We kiezen deze eenheid van een nanoseconde voor de duur tussen twee tijdstikken om een handzame klok te verkrijgen. De relatie tussen de tijdsduur en de afstand geldt uiteraard alleen als de klok stilstaat ten opzichte van ons, als waarnemer. Hou de klok nu rechtop, dus de spiegels evenwijdig aan de grond, maar laat de gehele klok bewegen met een snelheid v. Denk daarbij aan een klok in een rijdende trein die we van het perron waarnemen. Als we mee zouden reizen met de klok in de trein verandert er natuurlijk niets, maar wij staan op het perron en volgen het licht van onder naar boven en weer terug. Omdat de spiegels en de trein met een snelheid v bewegen, hebben deze tussen de tijd van het vertrek van het licht en de aankomst bij de bovenste spiegel een afstand $vT/2$ afgelegd, en nog eens dezelfde afstand op de terugweg, zie de figuur. Hierbij is T uiteraard de tijdsduur voor het op en neer gaan van het licht, **maar gezien vanuit onze waarnemingspositie**. Om deze tijd T te bepalen, rekenen we uit wat de afstand is die het licht heeft afgelegd. Hier komt de stelling van Pythagoras mooi van pas, want deze afstand is twee maal de lengte van de schuine zijde van de rechthoekige driehoek die we in de figuur hebben aangegeven. De verticale rechte zijde heeft een lengte L, en de horizontale rechte zijde een lengte $vT/2$. Dus de weg die het licht heeft afgelegd is gelijk aan

$$2\sqrt{L^2 + (vT/2)^2}$$

Anderzijds is deze lengte ook gelijk aan de snelheid van het licht vermenigvuldigd met de tijd T die het nodig had.



Nu komt het lichtpostulaat van pas, want die snelheid is dus gelijk aan *c* (onafhankelijk van de beweging van de klok, die met een constante snelheid beweegt, zodat er - in goede benadering - geen krachten op werken). Dus

$$cT = 2\sqrt{L^2 + (vT/2)^2}$$

Anderzijds geldt voor de waarnemer die meereist met de klok dat het licht vertikaal op en neer gaat, dus een afstand *2L* aflegt. De tijd die het daarvoor gebruikt is de nanoseconde ($t=10^{-9}$ s); zo hebben we nu eenmaal de klok geijkt. Ook voor de meereizende waarnemer is de snelheid van het licht gelijk aan *c*, zodat $ct=2L$. De hoogte van de klok *L* is voor beide waarnemers hetzelfde. Dus we kunnen $L=ct/2$ invullen in de andere vergelijking

$$cT = 2\sqrt{(ct/2)^2 + (vT/2)^2}$$

Linker- en rechterkant van de vergelijking kwadrateren geeft

$$(cT)^2=(ct)^2+(vT)^2$$

We brengen $(vT)^2$ naar de andere kant van de vergelijking, delen door c^2 en vinden

$$(1-v^2/c^2)T^2=t^2$$

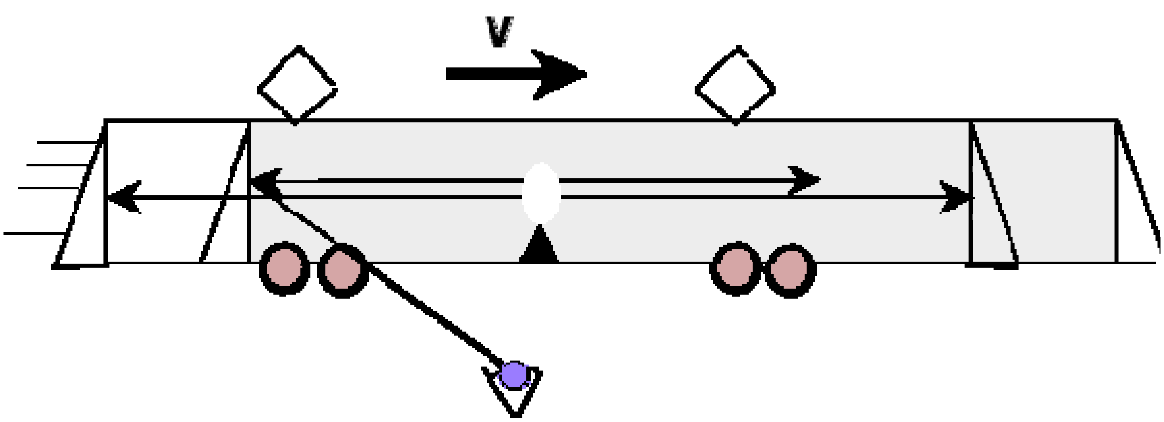
Hieruit lossen we nu dus eenvoudig *T* op, in termen van *t* en *v*

$$T = t/\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Dit is de beroemde formule van Einstein voor de tijdsdilatatie: **we zien een bewegende klok langzamer lopen dan een stilstaande klok.** Hoeveel langzamer hangt van de snelheid van de klok af. Als de snelheid gelijk aan nul is, dan is natuurlijk $T=t$, zoals het hoort. Als *v* nu groter en groter wordt, dan wordt ook *T* groter en groter. Totdat *v* dichter en dichter bij *c* komt, en *T* onbeperkt groot wordt. Bij $v=c$ is dan de tijdsduur tussen twee tikken op de klok oneindig groot, de tijd van de bewegende klok komt voor de waarnemer stil te staan.

U zult gemerkt hebben dat we telkens het waarnemingsaspect benadrukken. En waarnemen gaat nu eenmaal meestal via licht. Het was ook de eigenschap van het licht die aanleiding gaf tot dit, op het eerste gezicht, bizarre resultaat. Waarom is dit de meeste mensen nooit opgevallen.[2] Dat komt omdat in de dagelijkse praktijk de snelheden zo klein zijn ten opzichte van de snelheid van het licht. Laten we de omloopsnelheid van de aarde om de zon als voorbeeld nemen. Daarvoor is dus *v/c=1/10000*. Bij het berekenen van de tijdsdilatatie moeten we hiervan het kwadraat nemen. De afwijking in de gang van de klok is bij deze snelheid slechts 1 op 200 miljard seconden, of 1 seconde in 6 jaar, 4 maanden en 2 dagen. Dat kan men met atoomklokken wel meten, maar maakt echter wel duidelijk dat we er in het dagelijkse leven niets van merken. Toch zult U ongetwijfeld denken dat het komt door de manier waarop we de tijd hebben gemeten. Echter, laten we eens een heel andere klok nemen. Denk aan een koekoeksklok, een digitale klok, of wat mij betreft een tennisklok, waar een tennisbal op en neer stuitert (dan moeten we wel aannemen dat er geen energie verloren gaat bij het stuiteren, of door de wrijving met de lucht, maar het idee is duidelijk). Als we deze klokken in rust met elkaar vergelijken kunnen we bepalen hoeveel tikken de lichtklok heeft, binnen één tik van de koekoeks-, tennis- of digitale klok (dat zullen veel tikken zijn, maar dat maakt niet uit). Als nu al die klokken ten opzicht van **ons** bewegen, dan staan ze nog steeds stil ten opzicht van **elkaar**, en lopen dus nog steeds gelijk, ook voor ons, omdat het eenduidig is wanneer op dezelfde plaats en dezelfde tijd twee tikken samenvallen. Hoe raar het op het eerste gezicht ook lijkt, de tijdsdilatie is een **universeel** verschijnsel, en wordt daarbij van een eigenschap die bewegende klokken hebben, verheven tot een eigenschap van de tijd.

Een consequentie van het lichtpostulaat is dus dat er iets vreemds met de tijd gebeurt. Dit volgt ook uit het beroemde **gedachtenexperiment** van Einstein met een trein. We kunnen daarmee illustreren dat gelijktijdigheid van gebeurtenissen op **vershillende** punten in de ruimte afhangt van de bewegingstoestand van de waarnemer. Immers als we midden in de trein tegelijkertijd vanaf hetzelfde punt naar links en rechts een lichtpuls versturen, dan komt deze voor de waarnemer in de trein tegelijkertijd aan de voor en de achterkant van de trein aan. Maar als we nu diezelfde gebeurtenis vanaf het perron waarnemen, dan is de achterkant van de rijdende trein wat in de richting van de lichtbron verschoven tijdens de reis van de lichtpuls, terwijl de voorkant van de trein juist wat verder weg is gegaan. De puls zal dus eerder aan de achterkant arriveren dan aan de voorkant. Dit is zo, omdat ook voor de waarnemer op het perron de snelheid van het licht gelijk is aan *c*.



Bij geluidsgolven zou de snelheid van het geluid ten opzichte van het perron, gericht naar de achterkant van de trein, gelijk zijn aan *c-v*, terwijl het naar de voorkant snellende geluid ``met de trein wordt meegesleurd'' en een snelheid *c+v* zou hebben. Dat zou dan het tijdsverschil compenseren. Maar voor het licht geldt dit dus **niet**, zijn snelheid blijft onafhankelijk van die van waarnemer of bron.

Met een tijd die langer wordt voor bewegende klokken, maar een snelheid die onafhankelijk van de beweging is, ligt het voor de hand dat de waargenomen lengte van een meetlat korter wordt. Dit is de beroemde **Lorentzcontractie,** vernoemd naar de Leidse hoogleraar die zijn naam heeft gegeven aan het Instituut voor Theoretisch Natuurkunde. We geven de bewegende klok een lampje mee dat gedurende de tijd T aan is. We nemen nu een meetlat met een lengte L_0, waarlangs de klok beweegt, precies zo dat het lampje alleen aan is zolang de klok zich ter hoogte van de meetlat bevindt. Dus $L_0=vT$. Hoe ziet dit eruit voor iemand die met de klok meebeweegt, en ten opzichte waarvan de meetlat dus beweegt met een snelheid v? Voor die waarnemer is het lampje aan gedurende een tijd

$$t = T\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

en deze waarnemer concludeert dus dat de meetlat een lengte heeft gelijk aan

$$L = vt = vT\sqrt{1 - v^2/c^2} = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

.

Een bewegende meetlat wordt verkort waargenomen in de richting van de beweging (loodrecht op de beweging zal de lengte van de meetlat **niet** veranderen).

We zien dat de bewegingstoestand een belangrijk rol speelt. Helaas wordt vaak het begrip ``alles is relatief'' uit zijn verband gerukt, en vaak buiten de natuurkunde toegepast. Maar ook binnen de natuurkunde kan dit tot grote verwarring aanleiding geven. We gaan nu, om U in die verwarring te brengen, de beroemde tweelingenparadox bespreken.[3] We sturen een astronaut met een snelheid die achttiende van de lichtsnelheid bedraagt (*v=0,8 c*) naar de ster alpha Centauri, die op ongeveer een afstand van 4 lichtjaar staat. In de sterrenkunde zijn alle afstanden groot, en om te voorkomen dat we over de grote getallen struikelen hebben de sterrenkundigen de grootheid **lichtjaar** ingevoerd. Dit is de afstand die het licht in één jaar aflegt. Dus 300.000 km/s maal 365 (=aantal dagen in een jaar) maal 24 (=aantal uren in een dag) maal 3600 s (=aantal seconden in een uur), ofwel ongeveer 9,5 triljard kilometer ($9{,}5 \times 10^{12}$ km). Om U een idee te geven, de afstand van de aarde tot de zon is ca. 8,3 licht**minuten**.

De tweelingbroer van de astronaut blijft achter op aarde. Gemeten op **zijn** klok doet de astronaut over de 4 lichtjaren slechts 5 aardse jaren. Immers het licht doet er 4 jaar over en de snelheid van de astonaut is 8/10, ofwel 4/5, van die van het licht. De astronaut doet er een factor 5/4 langer over dan het licht, dus 5 jaar. Als we even aannemen dat de astronaut meteen terugreist met dezelfde snelheid, dan doet hij er nog eens 5 aardse jaren over om terug te komen. Dus na 10 aardse jaren is de astronaut weer veilig terug. Maar nu hebben we een probleem. Voor de astronaut wordt zijn leeftijd bepaald door een klok die met hem meereist. Het levensritme, waarmee ademhaling, celdeling en sterfte plaatshebben is zo'n (weliswaar niet bijster nauwkeurige) klok. Omdat deze klok beweegt ten opzichte van de tweelingbroer weet ook hij dat de klok van de astronaut minder snel loopt, en wel met een factor

$$1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1/\sqrt{1 - 0{,}8^2} = 1/\sqrt{0{,}36} = 1/0{,}6 = 5/3$$

.

Dus is de astronaut bij terugkomst na 10 aardse jaren slechts *3/5 X 10=6* jaren ouder geworden.

Waarom geeft dit zoveel verwarring? De **foute** redenering zegt dat volgens Einstein alles relatief is, de natuurwetten zijn in ieder stelsel gelijk. Dus kunnen we ook doen alsof de astronaut op zijn plaats blijft en de tweelingbroer over 4 lichtjaren heen en weer reist, en dus jonger terug zou moeten komen. Maar hij kan niet én jonger én ouder zijn. Maar laten we even iets preciezer zijn. Het is niet zo dat we bij de omkering van de rol van astronaut en tweelingbroer de laatste over 4 lichtjaren heen en weer sturen, nee we moeten met hem de hele aarde, ja zelfs het hele zonnestelsel, de melkweg, het hele heelal over 4 lichtjaar heen en weer sturen. En geloof me, er is geen raket in het universum die zoveel stuwkracht kan geven dat we dit allemaal voor elkaar krijgen. Door de versnelling en de vertraging die nodig zijn om de astronaut zijn snelheid te geven, kan men **niet** de rol van astronaut en tweelingbroer verwisselen. Het zijn zowel de versnellingen als de vertragingen die in feite de astronaut zijn verjonging opleveren. Hardlopers zijn in dit geval dus geen doodlopers!

Men heeft deze verjongingskeur echt kunnen meten, door met gevoelige atoomklokken een vliegreis te maken. Ook in de grote deeltjesversnellers, waar electrisch geladen deeltjes met snelheden dicht bij die van het licht worden rondgestuurd, en waar dus het effect van de tijdsdilatatie erg groot is, heeft men het effect ondubbelzinnig aangetoond. Het is zelfs zo dat de deeltjesversnellers niet eens **kunnen** werken zonder hiermee rekening te houden. In ons voorbeeld hoort de snelheid van *0,8 c* natuurlijk nog lang niet tot de mogelijkheden van de aardse ruimtevaart (maar wel van de deeltjesfysica). Echter, met de populaire serie Star Trek is het tegenwoordig wat minder moeilijk een voorstelling te maken van wat het betekent om met zulke grote snelheden te reizen.

Laten we vanuit de voyager, die met een snelheid 0,8c ten opzichte van de aarde beweegt, een shuttle lanceren die ten opzichte van de voyager ook een snelheid 0,8c heeft. Ik hoor U denken: ``dan zal toch wel de totale snelheid van de shuttle groter dan die van het licht zijn.'' Mooi dus niet. We hebben al gezien dat we op moet passen bij dit soort grote snelheden. Immers, als we de shuttle vervangen door een lichtpuls, die ten opzichte van de shuttle met de snelheid c beweegt, dan heeft diezelfde lichtpuls **volgens het lichtpostulaat** ten opzichte van de aarde nog steeds een snelheid gelijk aan c. U had ongetwijfeld verwacht dat de snelheden bij elkaar opgeteld kunnen worden. Dus als u de snelheid van de voyager ten opzichte van de aarde is en v de snelheid waarmee de shuttle de voyager achter zich laat, dan verwacht U dat de snelhed van de shuttle ten opzicht van de aarde gelijk is aan $u+v$. Dit is dus **niet** waar. In plaats daarvan geldt voor de snelheid van de shuttle ten opzichte van de aarde

$$(u+v)/(1+uv/c^2).$$

Voor het extreme geval dat we de shuttle vervangen door een lichtpuls, waarvoor dus $v=c$, kunnen we controleren of deze formule inderdaad voor de snelheid van de lichtpuls ten opzichte van de aarde c oplevert. Invullen van $v=c$ geeft

$$(u+c)/(1+uc/c^2)=(u+c)/(1+u/c)=c$$

inderdaad precies de lichtsnelheid! Voor **kleine** snelheden merken we weinig van de afwijking van het verwachte resultaat, $u+v$. Met het voorbeeld waarbij beide snelheden groot zijn, $u=v=0{,}8\,c$, geldt dat de snelheid van de shuttle ten opzichte van de aarde fors afwijkt van het simpel optellen van de snelheden. In plaats daarvan wordt deze snelheid gegeven door $(0{,}8c+0{,}8c)/(1+(0{,}8c)^2/c^2)=(1{,}6/1{,}64)c$ en dat is nog steeds **kleiner** dan c. Wat U ook probeert, de snelheid opbouwen in vele stappen met snelheden die ieder voor zich dicht bij c zitten, de totale snelheid zal **nooit** groter dan die van het licht zijn.

Einstein heeft bij het ontwikkelen van zijn theorie veel gebruik gemaakt van **gedachtenexperimenten**. Één daarvan hebben we al besproken. Ook om te laten zien dat energie en massa equivalent zijn gebruikte Einstein een fraai gedachtenexperiment. We hebben daarbij het begrip ``hoeveelheid beweging'' nodig (ook wel impuls genoemd). Dat is massa vermenigvuldigd met snelheid, of mv. Het blijkt zo te zijn dat de totale hoeveelheid beweging behouden is als er op het geheel waarvan we deze totale hoeveelheid beweging bepalen geen **uitwendige** krachten werken. Dit verklaart de terugstoot bij het afvuren van een geweer. De kogel gaat in voorwaartse richting, het geweer in achterwaartse richting. De massa van de kogel is veel kleiner dan die van het geweer, waardoor de terugslag van het geweer evenredig veel kleiner is. Hetzelfde bij de voortstuwing van een raket: Die gaat vooruit door de verbrandingsgassen die naar achteren worden gestuwd. Ook de botsing van biljartballen wordt door het behoud van de hoeveelheid beweging (én van energie) bepaald. Schieten we een biljartbal **precies in het midden** op een andere biljartbal, dan valt de bal die we stoten stil en gaat de geraakte bal met de snelheid van de gestote bal verder. De hoeveelheid beweging is behouden, want beide biljartballen hebben dezelfde massa.[4]

Het behoud van de hoeveelheid beweging is volledig equivalent met de opmerking dat het zwaartepunt van een systeem waarop geen **uitwendige** krachten werken niet versnelt. Als het zwaartepunt beweegt dan kunnen we onze metingen in het stelsel doen waarin het zwaartepunt in rust is. De coördinaten van het zwaartepunt worden in dit zogenaamde rust- of zwaartepuntstelsel bepaald door de coördinaten van ieder object, vermenigvuldigd met de massa van dat object, bij elkaar op te tellen en te delen door de totale massa. Een tijdje later zijn de coördinaten veranderd maar blijft het zwaartepunt hetzelfde. Omdat snelheid gelijk is aan afgelegde weg (bepaald door het verschil in de coördinaten), gedeeld door (de daarvoor) benodigde tijd, worden de componenten van de snelheid in de verschillende coördinaatrichtingen bepaald door de verandering van de coördinaten te delen door de tijd. We zien aldus dat de totale hoeveelheid beweging niet verandert (in het zwaartepuntstelsel is de totale hoeveelheid beweging gelijk aan nul). Daarnaast is het natuurlijk iedereen bekend dat de totale energie altijd behouden moet zijn. Beide wetten zijn op de ervaringswereld gebaseerd, maar hebben ook een diepere betekenis die samenhangt met het feit dat er (althans in principe) in de ruimte geen voorkeurspunt en in de tijd geen voorkeurstijd is aan te geven. Hierover heeft Prof. Icke U in de eerste lezing al heel wat fraais verteld.

We hebben nog één ingrediënt nodig, namelijk dat licht naast een hoeveelheid energie, ook een hoeveelheid beweging heeft. Dit is de zogenaamde stralingsdruk en deze is niet zo eenvoudig te meten, maar heeft onder andere (deels) te maken met het feit dat kometen een staart vormen, en de zon niet onder zijn eigen gewicht instort. Beide eigenschappen volgen ook uit de theorie van Maxwell. Daaruit volgt tevens dat de hoeveelheid beweging van het licht **precies** gelijk is aan de energie E van het licht, gedeeld door de lichtsnelheid c, E/c. Einstein's beroemde formule laat zien dat de energie van het licht equivalent is met een hoeveelheid massa. Gewoonlijk bepalen we massa door op een weegschaal objecten met elkaar te vergelijken. Daarbij wordt zo'n object, bijvoorbeeld een appel, eerst stil gelegd op de weegschaal en dan gewogen. Dit heet ook wel **rustmassa**. Maar licht **kan niet** stil gezet worden. Dat is de ultieme consequentie van het lichtpostulaat. Het beweegt altijd met de snelheid c. Als we het toch stilzetten, kan het geen energie meer hebben, maar uitspraken doen over niets heeft weinig zin. We zeggen wel dat licht een rustmassa gelijk aan nul heeft. Toch blijkt uit het volgende gedachtenexperiment van Einstein dat de energie van het licht wel degelijk bijdraagt aan massa. Einstein liet dit zien door naar het zwaartepunt van een doos te kijken, waarbij binnen de doos een lichtpuls wordt uitgestuurd. Doordat deze puls een hoeveelheid beweging heeft, zal de doos een terugstoot ondervinden. De doos beweegt dan in de tegengestelde richting, **totdat** de lichtpuls aan de andere kant van de doos wordt opgevangen. Hierbij draagt het precies de juiste hoeveelheid van beweging aan de doos over, om deze weer tot stilstand te brengen. Maar terwijl het licht van de ene kant naar de andere kant is bewogen, heeft de doos een afstand afgelegd, die weliswaar klein is (omdat de lichtsnelheid zo groot is), maar niet gelijk aan nul. Echter al die tijd hebben er geen krachten van buiten op de doos gewerkt. Het zwaartepunt moet daarom op zijn plaats blijven. Dat kan alleen als de lichtpuls de hoeveelheid beweging van de doos neutraliseert. Maar dat betekent dat de lichtpuls een massa vertegenwoordigt, want anders zou het niet aan het de hoeveelheid beweging kunnen bijdragen.

$$m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Het is niet moeilijk om uit te rekenen wat deze equivalente massa is. Als E de energie van de lichtpuls is, dan is de hoeveelheid beweging E/c. Als het licht, zoals in bovenstaande figuur, naar rechts beweegt krijgt de doos een terugslag (met snelheid v) naar links, met een hoeveelheid beweging Mv die gelijk is aan E/c. Immers, de hoeveelheid beweging moet behouden blijven: Voordat het licht uitgezonden wordt is de hoeveelheid beweging gelijk aan nul, dat blijft alleen nul als daarna de hoeveelheid beweging van het licht gelijk (maar tegengesteld gericht) is aan die van de doos. De massa van de doos is M, maar de waarde daarvan is niet van belang. Het licht legt een afstand L af gedurende de tijd $t=L/c$, terwijl de doos in die tijd een afstand $d=vt$ aflegt. Nadat het licht aan de rechterwand is geabsorbeerd komt de doos weer tot stilstand en heeft het zwaartepunt zich dus verplaatst over een afstand $mL-Md$. Hierbij is m de massa die het licht nodig heeft om dit zwaartepunt op zijn plaats te houden, zodat dus $mL-Md=0$ een oplossing heeft. We vullen nu eerst in dat $d=vt$, dan $t=L/c$, en tenslotte $Mv=E/c$. We vinden daarmee

$$mL-Md=mL-Mvt=mL-Mv(L/c)=mL-(E/c)(L/c)=L(m-E/c^2).$$

Dit kan dus alleen nul zijn als inderdaad Einstein's beroemde formule $E=mc^2$ geldt! Maar nogmaals, licht kan niet stilgezet worden en heeft geen rustmassa.

Als een deeltje wel een rustmassa (m_0) heeft, dan is het nu ook duidelijk dat de massa van de snelheid af moet hangen. Want als een deeltje een snelheid krijgt, dan wint het aan energie.[5] Deze bewegingsenergie is gelijk aan $E_k=m_0v^2/2$, de zogenaamde kinetische energie, maar dit geldt alleen bij lage snelheden. De totale energie is dan de energie bij rust, ofwel de rustenergie $E_0=m_0c^2$, plus de kinetische energie. Dus

$$E=m_0(1+0,5v^2/c^2)c^2= m\,c^2.$$

We concluderen dat $m=(1+0,5v^2/c^2)m_0$ **bij lage snelheden**. Het resultaat geldig voor **willekeurige** snelheden, luidt

$$m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

We gaan na dat dit inderdaad bij lage snelheden het eerdere resultaat geeft. Daartoe moeten we aantonen dat (het slangetje betekent "in benadering gelijk aan")

$$\left(1 + \tfrac{1}{2}v^2/c^2\right) \sim 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad ?$$

zolang v veel kleiner is dan c. Vermenigvuldig links en rechts met

$$\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

en kwadrateer beide kanten van de vergelijking, zodat

$$\left(1 + \tfrac{1}{2}v^2/c^2\right)^2\left(1 - v^2/c^2\right) \sim 1 \quad ?$$

Dit is juist zolang we v^4/c^4 kunnen verwaarlozen ten opzichte van v^2/c^2 hetgeen voor lage snelheden, veel kleiner dan *c*, natuurlijk is toegestaan.

Nu begrijpt U ook waarom **niets sneller dan het licht kan**. Hoe groter de snelheid is, hoe groter de massa, hoe moeilijker het wordt nog meer snelheid te maken. Als $v=c$ wordt de massa oneindig groot en kost het oneindig veel moeite om de snelheid op te voeren.

Hopelijk heb ik met bovenstaande mijn doel bereikt deze fraaie theorie ook voor niet ingewijden van haar mystiek te ontdoen. Formules waren er niet ter bezwering van het onbekende, maar ter verduidelijking van het bekende. De algebra is simpel, de consequentie echter verstrekkend. Dat is ook juist de aantrekkingskracht van deze theorie. Ik hoop ook dat U iets meekrijgt van de ``schoonheid'' van de natuurkunde. Ik heb er geen enkel probleem mee hierover vaag te blijven. Het is net als met muziek, een kwestie van smaak. Mooie theorieën hebben, net als mooie muziek, meer kans op eeuwige roem, maar laten ons ook steeds beter de natuur begrijpen. Het blijft opmerkelijk en wonderlijk hoe effectief onze wiskundige beschrijving van de natuur met de werkelijkheid overeenkomt, evenals de harmonieleer ons aangeeft welke frequentieverhouding lekker in het gehoor ligt.

Epiloog

De equivalentie van massa en energie heeft naast de verdieping van het inzicht in de natuur, ook verstrekkende gevolgen gehad voor de maatschappij. Dat heeft uiteraard bijgedragen aan het feit waarom juist deze formule, $E=mc^2$, zo algemeen bekend is. Ik doel hierbij natuurlijk op de toepassingen van de kernsplijting en de atoombom. Een zware atoomkern, zoals die van uranium, kan namelijk uiteenvallen in kleinere delen, waarvan de som van de rustmassas kleiner is dan de rustmassa van uranium. Het kleine verschil in rustmassa dat zo ontstaat, bepaalt de vrijgekomen energie door te vermenigvuldigen met c^2. Omdat de waarde van *c* zo ontzettend groot is, is de energie die vrij komt ook erg groot, ook al is het verschil in rustmassas klein. Deze vrijgekomen energie kan gebruikt worden om electriciteit op te wekken of om andere uraniumkernen tot splijting te brengen. Het laatste proces kan tot een kettingreactie aanleiding geven, met alle gevolgen van dien. Bij kernfusie is het net andersom. De energie komt vrij bij de versmelting van deeltjes. Het is waarom de zon al zo lang zijn licht kan laten schijnen over de aarde en de mens de kans heeft gegeven te evolueren. Einstein was op zoek naar de structuur van de ruimte en tijd, niet naar de opwekking van energie. Fundamenteel onderzoek is wat een kind in zijn onschuld doet, telkens weer vragen naar het waarom? Altijd komt het bij een punt waar het antwoord nog niet bekend is. Het is de onschuld van de vraag naar het waarom die de mens zijn waardigheid geeft; maar het is de drang tot het nut die de mensheid bederft.

Tot slot wil ik U wijzen op twee prachtig geschreven boeken over Einstein's relativiteitstheorie: ``Mr. Tompkins in Paperback'', door George Gamow (Cambridge University Press, 1965) en "Einstein's Mirror", door Tony Hey en Patrick Walters (Cambridge University Press, 1997).

Een meer uitgebreide versie van deze tekst, afgestemd op leerling van 5-6 VWO, gaat dieper in op het "optellen" van snelheden en de bepaling van de snelheidsafhankelijke massa, door weer gebruik te maken van mooie gedachtenexperimenten. Ook wordt daar zeer kort ingegaan op de het equivalentieprincipe en het begrip zwarte gaten.</P< TD>